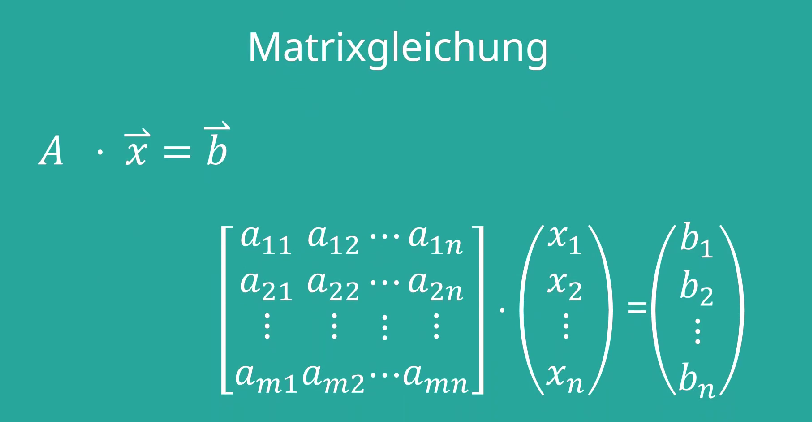
Gaußsches Eliminationsverfahren

Das **Gaußsche Eliminationsverfahren** ist ein Verfahren zur Lösung **linearer** **Gleichungssysteme**. Dafür wird das Gleichungssystem zunächst in **Matrixform** ausgedrückt. Anschließend formst du die Matrix, durch **Zeilenumformung** so um, dass ihre Werte unterhalb der Hauptdiagonalen zu 0 werden. In der untersten Zeile kannst du nun die Lösung der ersten Unbekannten ermitteln. Diese Lösung setzt du dann in die Zeile darüber ein um deine nächste Unbekannte zu bestimmen. Diesen Vorgang wiederholst du solange, bis du alle Unbekannten bestimmt hast und damit dein Gleichungssystem gelöst ist.

**Anwendung des Gaußschen Eliminationsverfahrens**

Bei der Analyse von elektronischen Schaltungen mit dem [Maschenstrom](https://studyflix.de/elektrotechnik/maschenstromverfahren-329)– oder [Knotenpunktpotentialverfahren](https://studyflix.de/elektrotechnik/knotenpunktpotentialverfahren-332)erhalten wir ein Gleichungssystem, das sich als **Matrixgleichung** schreiben lässt. Allgemein kann das so aussehen:

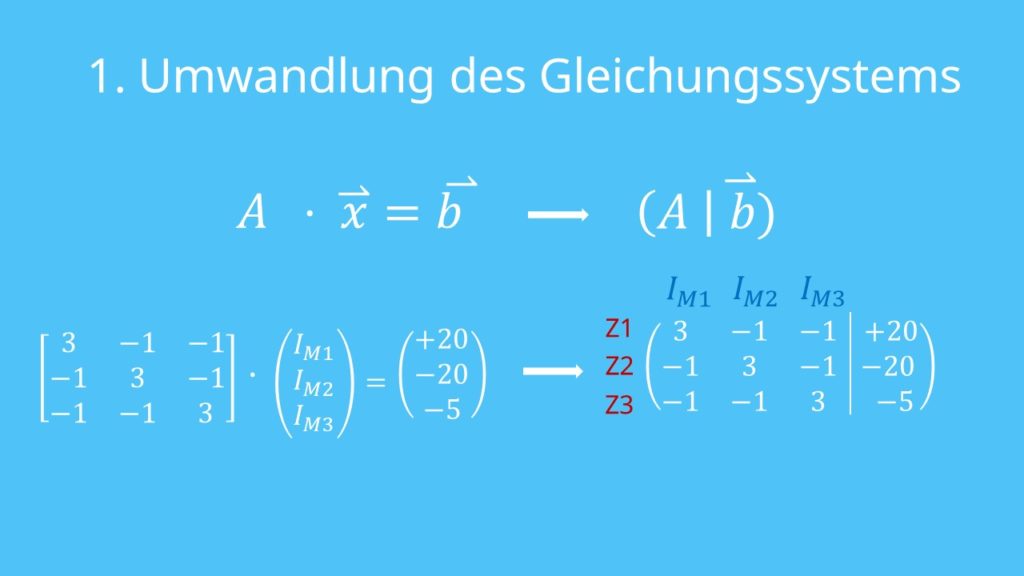


Es gibt mehrere Möglichkeiten Matrix-Gleichungen zu lösen und eine Möglichkeit ist eben das Gaußsche Eliminationsverfahren.

**Umwandlung des Gleichungssystems**

Erster Schritt ist das Umwandeln des Gleichungssystems. Dazu multipliziert man jedes Element des Vektors mit jedem Element der jeweiligen Zeile der Matrix. Der Ergebnisvektor wird dann durch einen Strich vom Rest der Matrix getrennt. Diese Form wird benötigt um danach weiterrechnen zu können.

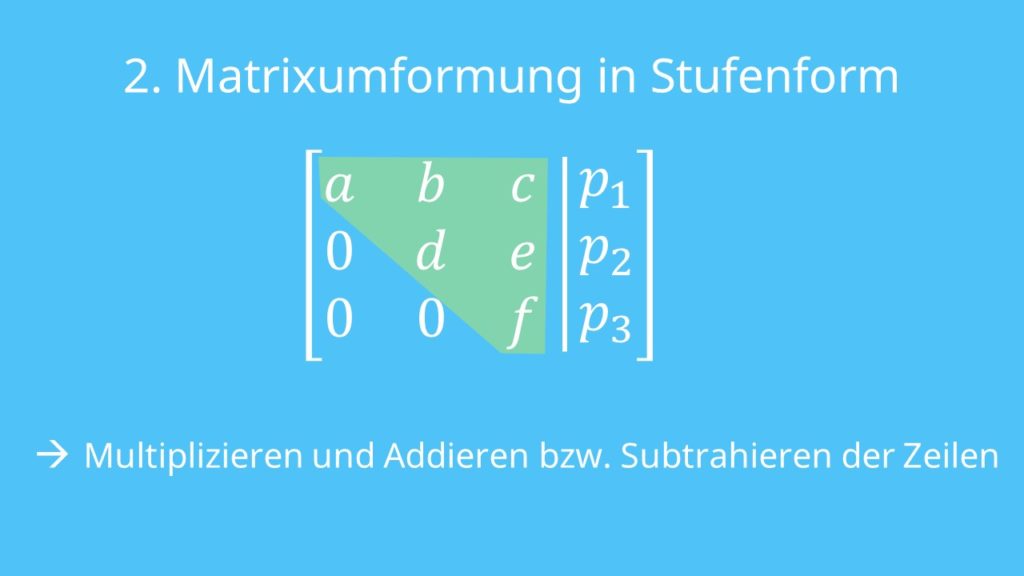
**Umwandlung des Gleichungssystems**

Beginnen wir mit Schritt eins des Gaußschen Eliminationsverfahrens, der **Umwandlung des Gleichungssystems**. Dazu multiplizieren wir jedes Element des Vektors mit jedem Element der jeweiligen Zeile der Matrix. Der **Ergebnisvektor** wird dann durch einen Strich vom Rest der Matrix getrennt. Diese Form der Matrix benötigen wir, um danach weiterrechnen zu können. 

Der Vektor mit den gesuchten Strömen steht nun über den einzelnen Spalten. Wir schreiben ihn dabei aber nicht hin, sondern behalten ihn einfach im Kopf. Zudem nummerieren wir die einzelnen Zeilen durch.

**Matrix in Stufenform**

Stufenform heißt, dass pro Zeile mindestens eine Variable weniger auftritt, also mindestens eine Variable eliminiert wird, indem die Zeile so umgeformt wird, dass der Koeffizient der Variablen Null ist.



[Zum Erreichen der Stufenform sind drei Umformungen zulässig: Es können (komplette) Zeilen vertauscht werden, eine Zeile kann mit einer von Null verschiedenen Zahl multipliziert werden oder es darf, wie beim Additionsverfahren, eine Zeile oder das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert werden.  
Im zweiten Schritt werden ausgehend von der letzten Zeile, in der sich nur noch eine Variable befindet, die Variablen ausgerechnet und in die darüberliegende Zeile eingesetzt.](https://studyflix.de/elektrotechnik/gausssches-eliminationsverfahren-333)

Ein [lineares Gleichungssystem](https://mathepedia.de/Lineare_Gleichungssysteme.html) kann eine, mehrere oder keine Lösung haben. Diese Unterscheidung kann schon nach der Vorwärtselimination getroffen werden, indem die letzte Zeile betrachtet wird.

Beispiel:

1. *x* + 2y*y* + 3z*z* = 2, hier: a\_1 = 1,\, a\_2 = 2,\, a\_3 = 3*a*1​=1,*a*2​=2,*a*3​=3 und e\_1 = 2*e*1​=2
2. x*x* + y*y* + z*z* = 2
3. 3x*x* + 3y*y* + z*z* = 0

Es werden schematisch nur die Koeffizienten (a,\, b,\, c,\, e)(*a*,*b*,*c*,*e*) geschrieben:



Jetzt wird so umgeformt, dass b\_1b1​ und c\_1c1​ Null werden, indem man geeignete Vielfache der ersten Gleichung zur zweiten und dritten Gleichung addiert. Den Multiplikator, mit dem man die Zeile multiplizieren muss, erhält man, indem man die erste Zahl der Zeile, aus der das Element elimiert werden soll, durch die Zahl teilt, die sich in der Zeile darüber an der gleichen Position befindet (hier: 1/1=1, 3/1=3). Da das Element verschwinden soll, muss die Zahl noch mit (-1) multipliziert werden, so dass sie negativ wird.

Zu Zeile 2 wird das (-1)-fache und zu Zeile 3 das (-3)-fache von Zeile 1 addiert. Damit c\_2c2​ Null wird, wird ein Vielfaches von Zeile 2 zu Zeile 3 addiert, in diesem Fall das (-3)-fache:

A picture containing text, clock

Description automatically generated

Falls die Zahl, durch die zur Berechnung des Multiplikators dividiert wird (hier für die ersten beiden Zeilen die Zahl 1, beim dritten Mal die Zahl (-1) ), Null ist, wird diese Zeile mit einer weiter unten liegenden vertauscht.

Am Ende kann durch Betrachten der letzten Zeile über die Lösbarkeit entschieden werden. Das Gleichungssystem ist:

1. eindeutig lösbar, wenn kein Element der [Diagonalen](https://mathepedia.de/Matrizen.html) (hier: a\_1, b\_2, c\_3a1​,b2​,c3​) Null ist,
2. nicht eindeutig oder unlösbar, wenn ein Element der [Diagonalen](https://mathepedia.de/Matrizen.html) Null ist

Befindet sich die einzige Null auf der [Diagonalen](https://mathepedia.de/Matrizen.html) in der letzten Zeile, ist das System unlösbar, wenn auf der rechten Seite (e\_x)(ex​) eine Zahl ungleich Null steht, da es sich dann um eine falsche (unerfüllbare) Aussage handelt (z. B. 0=1); hingegen hat das System [unendlich](https://mathepedia.de/Endlichkeit.html) viele Lösungen und ist nicht eindeutig lösbar, wenn dort eine Null steht, da es sich um eine wahre Aussage (0=0) handelt.

Weiter im Beispiel:

Die letzte Zeile bedeutet

-2z = -6−2z=−6 .

Diese Gleichung ist einfach lösbar und z = 3z=3.

Damit ergibt sich für die zweite Zeile

-1y-2z = 0−1y−2z=0, also y = -6y=−6

und weiter

x = 5x=5 .

Damit sind alle "Variablen" (x,\, y,\, z)(x,y,z) berechnet:

x = 5 \quad y = -6 \quad z = 3x=5y=−6z=3 .

Wird im ersten Schritt die [Matrix](https://mathepedia.de/Matrizen.html) weiter umgeformt, bis die Lösung direkt abgelesen werden kann, nennt man das Verfahren Gauß-Jordan-Algorithmus.

### Kontrolle durch Zeilensumme

Die Umformungen können durch das Berechnen der Zeilensumme kontrolliert werden.

A picture containing text, clock

Description automatically generated

Hier wurde in der letzten Spalte die Summe aller Elemente der jeweiligen Zeile addiert. Für die erste Zeile ist die Zeilensumme 1+2+3+2 = 8. Da an der ersten Zeile keine Umformungen durchgeführt werden ändert sich ihre Zeilensumme nicht. Bei der ersten Umformung dieses Gleichungssystems wird zur zweiten Zeile das (-1)-fache der ersten addiert. Macht man das auch für die Zeilensumme dann gilt 5 + (-1)\*8 = -3. Dieses Ergebnis ist die Zeilensumme der umgeformten zweiten Zeile -1 - 2 + 0 = -3. Zur Überprüfung der Rechnungen kann man also die Umformungen an der Zeilensumme durchführen, sind alle Rechnungen korrekt, muss sich die Zeilensumme der umgeformten Zeile ergeben.